

# 引入公共因子的 Logit 型随机用户均衡模型

程小云, 段征宇, 赵娅丽

(同济大学 道路与交通工程教育部重点实验室, 上海 201804)

**摘 要:** 交通分析模型中随机分配模型对误差项的 IID 假设既是简化计算的原因也是导致分配结果偏离实际的根本问题. 针对独立同分布假设影响分配结果的问题, 提出了一种考虑选择肢之间相互影响作用的分配模型. 该模型通过在效用函数的确定项部分引入公共因子反映选择肢之间的相似度, 通过数学推导证明该模型的解与随机用户均衡的解是一致的, 以及解是唯一的, 并采用连续平均(MSA)算法求解该模型. 最后以北京奥运公园局部路网的 VISUM 模型为实验区, 对比分析了该模型与传统用户均衡模型在分配结果上的差异. 结果表明该模型能够反映选择肢间的影响, 使得路径流量分布更均, 更接近实际情况.

**关键词:** 公共因子; Logit 型随机用户均衡模型; 分配模型; 连续平均法

**中图分类号:** U 491.1 **文献标志码:** A **文章编号:** 1001-0645(2012)增刊 1-0161-04

## Stochastic User Equilibrium Assignment Model Incorporating Commonality Factor

CHENG Xiao-yun, DUAN Zheng-yu, ZHAO Ya-li

(Key Laboratory of Road and Traffic Engineering of the Ministry of Education,  
Tongji University, Shanghai 201804, China)

**Abstract:** In the stochastic user equilibrium assignment model of transportation analysis, the assumption of independent and identical distribution (IID) was the reason for simplifying calculation while it is the fatal weakness as well. Aimed at this problem, an assignment model considering the interaction between alternatives in the choice set was proposed. This model introduced the commonality factor into the deterministic part of the utility function to capture the degree of similarity between the alternatives. And the uniqueness and equivalence conditions of the proposed model were proved by mathematical derivation. Moreover, the model was established by the method of successive average (MSA). Finally, network in Beijing Olympic Park was chosen as the trial plot to validate this method by the platform of VISUM. The assignment results of proposed model and traditional UE model were compared. The results indicated this model makes flows distributed more evenly between paths, which might be more close to practical situation.

**Key words:** commonality factor; Logit-SUE model; assignment model; method of successive average

离散选择模型描述了决策者(个人、家庭、企业或其他决策单位)在可供选择的项之间所做出的选择<sup>[1]</sup>, 选择集合必须具备互斥性、完备性和有限

性. 基于效用最大化理论, 将用户从每个选择肢的“得益”用由固定项和随机项组成的效用函数表示. 其中随机项在分布上的差异产生了不同类型的离散

选择模型,当假定随机项相互独立且均服从 Gumbel 分布时,为多元 Logit 模型,该模型具有运算简便的特点;当假定随机项的联合密度函数为多元正态分布时,为多元 Probit 模型. 由于累计正态分布函数不能以封闭的形式确定数值,既不能求出解析式,也难以用多重积分的方法找出数值解,目前常用数值积分法、连续近似法和蒙特卡洛等这类近似法求解<sup>[2]</sup>.

Logit 模型对误差项的 IID 假设既是简化计算的原因也是导致分配结果偏离实际的根本问题. 本文在 Logit 模型的基础上对效用函数的固定项引入公共因子,从而考虑了路径之间重叠路段对用户决策的影响,并建立基于 C-Logit 模型的随机用户均衡模型. 采用传统的连续平均法(MSA)对模型求解. 以奥运公园局部路网作为试验区域,使用 VISUM 仿真软件进行分配,并对比分析了传统的用户均衡模型及基于 C-Logit 随机用户均衡模型的分配结果.

## 1 公共因子

Cascetta(1996)等<sup>[3]</sup>针对路径选择提出了 C-Logit 模型,通过在效用函数的确定项中引入公共因子或重叠因子获得选择集中选择肢之间的相似度. 该模型是一种考虑了路径间共线关系的 Multinomial Logit 模型,继承了多项式 Logit 模型 MNL 数学结构简单的优点. 公共因子的作用是使得含有重叠路段多的路径相比于相似的独立路径,其系统负效用更小. 模型表达式为

$$P_k = \frac{e^{-\theta(V_k - F_k)}}{\sum_{l \in K_{rs}} e^{-\theta(V_l - F_l)}}, \quad (1)$$

$$V_k = f(C_k), C_k = g(q_k), \forall k, l \in K_{rs}. \quad (2)$$

式中: $P_k$  为选择路径  $k$  的概率; $r, s$  分别为起点和终点; $\theta$  值为非负的校正系数; $V_k$  为效用函数,通常取线性函数形式; $C_k$  为路阻函数. 本文采用美国联邦公路局提出的 BPR 函数<sup>[4]</sup>,即

$$t_a(q_a) = t_0 \left[ 1 + \alpha \left( \frac{q_a}{C_a} \right)^\beta \right],$$

式中: $\alpha$  和  $\beta$  分别取 0.15 和 4; $K_{rs}$  为 OD 对  $rs$  的所有路径集合; $F_k$  为路径  $k$  的公共因子.

其中本文采用的计算公共因子的方法为<sup>[5]</sup>

$$F_{in} = -\beta_0 \ln \sum_{j \in C_n} \left[ \frac{L_{ij}}{\sqrt{L_i L_j}} \right]^\gamma$$

式中: $F_{in}$  为路径  $i$  的公共因子; $L_{ij}$  为路径  $i$  与  $j$  的

重叠路段的长度; $L_i, L_j$  分别为路径  $i$  和  $j$  的长度; $C_n$  为某 OD 对的路径集合; $\beta_0, \gamma$  为待估计参数,为方便计算参数值通常取 1 或 2,本文  $\beta_0$  和  $\gamma$  均取 1.

## 2 C-SUE 模型

### 2.1 模型描述

Fisk<sup>[6]</sup>于 1980 年提出了一个最优化问题,该问题中 OD 矩阵  $q_{rs}$  已知,将路径流量  $f_k^{rs}$  作为变量,并通过数学推导证明了该模型的解对应于 Logit 形式的路径选择公式,因此该最优化问题可认为是一个 SUE 条件解. 本文在此模型基础上构建了一个考虑路径重叠路段对用户选择敏感度影响的 SUE 模型.

$$\min Z(f) = \frac{1}{\theta} \sum_r \sum_s \sum_k f_k^{rs} (\ln f_k^{rs} - \theta F_k) + \sum_a \int_0^{x_a} t_a(w) dw, \quad (3a)$$

$$\text{s. t.} \quad \begin{cases} \sum_k f_k^{rs} = q^{rs} \quad \forall r, s, \\ f_k^{rs} \geq 0 \quad \forall k, r, s, \\ x_a = \sum_r \sum_s \sum_k f_k^{rs} \delta_{a,k}^{rs} \end{cases} \quad (3b)$$

式中: $f_k^{rs}$  为 OD 对  $r-s$  之间的路径  $k$  的流量; $x_a$  为路段  $a$  上的流量; $t_a(w)$  为路段  $a$  的阻抗函数; $\delta_{a,k}^{rs}$  为决策变量,如果路段  $a$  在连接 OD 对  $r-s$  的路径  $k$  上,其值为 1;否则为 0.

### 2.2 等价性及唯一性

#### 2.2.1 等价性

目标函数的第一项是  $f_k^{rs}$  的严格凸函数,第二项是  $f_k^{rs}$  的凸函数,两项之和是  $f_k^{rs}$  的严格凸函数. 约束是线性的,因此模型(3)有唯一的路径流量解. 该模型的库恩塔克(KKT)条件为<sup>[7]</sup>

$$\begin{cases} (\ln f_k^{rs} - \theta F_k + 1) + \sum_a \delta_{a,k}^{rs} t_a(x_a) - \lambda_{rs} - \mu_k^{rs} = 0, \\ -\mu_k^{rs} f_k^{rs} = 0 \quad \forall r, s, k. \end{cases} \quad (4)$$

$\lambda_{rs}$  和  $\mu_k^{rs}$  为模型约束式(3b)的 KKT 算子. OD 对  $r-s$  之间的有效路径集合为  $\Gamma_{rs}$ ,则任意  $k \in \Gamma_{rs}$  的路径流量  $f_k^{rs} > 0$ ,因此结合式(3b)可知  $\mu_k^{rs} = 0$ ,且  $\sum_a \delta_{a,k}^{rs} t_a(x_a) = c_k^{rs}$ ,代入式(4)可得

$$\frac{1}{\theta} (\ln f_k^{rs} - \theta F_k + 1) + c_k^{rs} - \lambda_{rs} = 0. \quad (5)$$

#### 2.2.2 唯一性

若要证明解的唯一性,必须证明 C-SUE 模型是严格凸的,即要证明该模型目标函数的 Hessian 矩

阵是严格正定的. 对模型的目标函数(3a)求二次偏导,可得

$$\frac{\partial^2 z(f)}{\partial f_l \partial f_k} = \begin{cases} \frac{1}{\theta f_k} & l = k \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad (6)$$

由前文可知  $f_k^n > 0$ , 且当  $\theta > 0$  Hessian 时矩阵严格正定, 所以模型(3)有唯一解.

3 模型算法

本文中采用常用于求解随机用户平衡问题的连续平均法(method of successive averages, MSA). 其基本原理是沿下降方法预先确定步长<sup>[8]</sup>, 采用满足目标函数收敛条件的最简单的步长序列  $\alpha_n = 1/n$ , 算法流程如下.

- ① 初始化. 根据未加载流量路网的初始行程时间集合  $\{t_a^0\}$  对给定的 OD 需求按照改进后的 SUE 模型进行一次流量分配. 得到各路段流量集合  $\{x_a^1\}$ , 令  $n=1$ ;
- ② 更新路段交通阻抗. 根据当前路段流量  $\{x_a^n\}$ , 采用 BPR 函数更新路段阻抗, 得到  $\{t_a^n\}$ ;
- ③ 确定搜索方向. 根据当前路段阻抗  $\{t_a^n\}$ , 进行流量分配, 得到辅助路段交通流量  $\{y_a^n\}$ ;
- ④ 更新路段流量. 令  $x_a^{n+1} = x_a^n + \frac{1}{n} (y_a^n - x_a^n)$  得到新的交通流量;
- ⑤ 收敛判断. 若已满足收敛条件, 则终止; 否则, 令  $n=n+1$ , 转向步骤 2.

4 算 例

选用北京奥运公园某区域路网, 基于 VISUM 仿真平台进行分析, 路网基本要素表 1 所示, 本研究分别对比了用户均衡(UE)和考虑公共因子的随机分配模型(C-SUE)的分配结果, 详细分析了 2 种分配模型在有效路径、路网总行程时间、路段饱和度方面的差异及造成差异的根本原因.

表 1 实验路网要素

Tab. 1 Elements of trial road network

| 路网要素 | 小区数 | 节点  | 路段      | 交叉口   | OD 对   |
|------|-----|-----|---------|-------|--------|
| 数量   | 141 | 343 | 1 002/2 | 3 138 | 19 881 |

该路网范围较小, 出行最大行程时间不超过 30 min, 路径长度对出行者选择的影响可忽略, 因此可采用 C-Logit 模型作为路径选择模型.

4.1 有效路径

有效路径的使用情况反映了流量在路网中各路

径之间的分布情况, 表 2 和表 3 分别为 UE 与 C-SUE 的路径条数所对应的 OD 对数.

表 2 UE 有效路径数及 OD 对数

Tab. 2 Efficient paths of UE model and the amount of OD pairs

| 路径数   | 1     | 2     | 3   | 4 |
|-------|-------|-------|-----|---|
| OD 对数 | 4 233 | 1 319 | 176 | 7 |

表 3 C-SUE 的有效路径数及 OD 对数

Tab. 3 Efficient paths of C-SUE model and the amount of OD pairs

| 路径数   | 1   | 2   | 3   | 4   | 5   | 6   | 7   | 8   | 9   | 10  | 11  |
|-------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| OD 对数 | 226 | 257 | 258 | 261 | 287 | 312 | 315 | 330 | 304 | 290 | 278 |
| 路径数   | 12  | 13  | 14  | 15  | 16  | 17  | 18  | 19  | 20  | 21  |     |
| OD 对数 | 226 | 215 | 200 | 206 | 157 | 152 | 187 | 143 | 150 | 133 |     |
| 路径数   | 22  | 23  | 24  | 25  | 26  | 27  | 28  | 29  | 30  | 31  |     |
| OD 对数 | 124 | 98  | 108 | 80  | 91  | 82  | 77  | 78  | 60  | 50  |     |

从表 2 和表 3 可看出, UE 模型中大部分 OD 对只使用了一条路径, 而最多有效路径也只有 4 条, 这也验证了 UE 模型的基本假设, 用户完全掌握路网的状态, 并选择费用最小的路径, 从而达到用户均衡. 相反, C-SUE 模型中有效路径数最大为 31 条, 路径流量不像 UE 那么集中, 反映了用户在不完全信息背景下选择路径的随机性, 更符合实际情况. 与平衡分配相比, 该算法可以使用更多的路径, 更接近实际情况.

4.2 路网总行程时间

所有用户的出行时间之和构成了路网的总行程时间, 它反映了路网整体的运行情况. 对路径流量及其行程时间加权求和后得到两种分配模型的路网总行程时间分别为 160 321 和 415 699 h, 可见随机分配得到的路网总行程时间约为平衡分配结果的 4 倍.

这是因为 UE 模型假设用户完全了解路网情况, 使得用户都一致地选择最短路径, 在路网未达到一定拥堵程度的情况下, 基本能保证行程时间最短; 而 C-Logit 模型则更贴合实际考虑了用户在路径选择时的随机性, 其中包含次一级的最短路径. 同时后者也考虑了路径中共线路段的影响, 因此导致路网总行程时间远远大于前者.

4.3 路段饱和度

采用两种模型分配后路段饱和度分别如图 1 和图 2 所示. 图中红色线为  $V/C > 1.5$ ; 橙色线为  $1.0 \leq V/C \leq 1.5$ ; 黄色线为  $0.5 \leq V/C \leq 1.0$ ; 绿色线为  $V/C \leq 0.5$ , 详见电子版.



图 1 UE 路段饱和度  
Fig. 1 Link saturation of UE



图 2 C-SUE 模型的路段饱和度  
Fig. 2 Link saturation of C-SUE

对比图 1 和图 2 可看到 UE 模型分配后路网中过饱和路段明显多于 C-SUE 模型的饱和路段数量,如前文所述用户选择的一致性,使得路网流量集中在某些路段,而其他路径未起到分担流量的作用;相比而言,考虑公共因子的 C-SUE 模型认为出行者个人认知和掌握的信息存在着不同,不是所有人都选择最优路径,同时也考虑了重叠路段的流量加载,因此流量在路网中分布更均匀,更接近实际情况。

## 5 结 论

本文将反映路段重叠的公共因子引入 Logit 选择模型中,并建立了相应的 C-SUE 模型,用数学推

导证明了模型的一致性与解的唯一性,构建了相应的 MSA 算法作为模型的求解算法。最后,以北京奥运公园某路网为试验区域在 VISUM 仿真平台上分别采用传统 UE 模型与上述 C-SUE 模型进行分配。结果表明,与平衡分配相比,C-SUE 模型可以找到更多的路径,其中包含次一级优秀的路径,同时也反映了路径间的非独立性对分配结果的影响,因此分配结果更符合实际。

### 参考文献:

- [1] Train, K L. Qualitative choice analysis [M]. Cambridge, MAL: MIT Press, 1986.
- [2] Daganzo C, Sheffi Y. On stochastic models of traffic assignment[J]. Transportation Science, 1977, 11 (3): 253 - 274.
- [3] Cascetta E, Nuzzolo A, Russo F, et al. A modified Logit route choice model overcoming path overlapping problems, specification and some calibration results for interurban networks [C] // Proceedings of the 13th International Symposium on the Theory of Road Traffic Flow. Lyon, France:[s. n.], 1996: 697 - 711.
- [4] Transportation research board. Highway capacity manual 2000 [M]. Washington D. C.: National Research Council, 2000.
- [5] Cascetta F, Bellia L. Velocity fields in proximity of local exhaust hood openings: an intercomparison between current recommended formulas and experimental studies [J]. Building and Environment, 1996, 31: 451 - 459.
- [6] Fisk C. Some developments in equilibrium traffic assignment[J]. Transportation Research Part B, 1980, 14(3): 243 - 255.
- [7] Boyd S, Vandenberghe L. Convex optimization [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2004.
- [8] Nguyen S, Dupuis C. An efficient method for computing traffic equilibria in networks with asymmetric transportation costs[J]. Transportation Science, 1984, 18(2): 185 - 202.

(责任编辑:刘雨)